UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dpto. de Cómputo Científico y Estadística
Cómputo Científico CO-3211

LABORATORIO #6

Autovalores, Métodos de la Potencia y Descomposición QR.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

1. Implemente el método de la Potencia presentado en la lámina 209 de las notas del curso, para calcular el autovalor dominante.

2. Teorema (de deflación): Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A con autovectores asociados $v^{(1)}, \cdots, v^{(n)}$ y suponga que λ_1 tiene multiplicidad 1. Asuma, además, y sin pérdida de generalidad, que los autovalores están ordenados de forma decreciente. Sea x un vector tal que $x^t\, v^{(1)} = 1$. Entonces, la matriz

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^t$$

   tiene los autovalores $0, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, para todo $i = 2, \cdots, n$.

   Existen varias formas de escoger x. Una manera, conocida como deflación de Wielandt, es tomar $x = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}(a_{i\,1}, \cdots, a_{i\,n})^t$, donde $v_i^{(1)} \neq 0$ y $(a_{i\,1}, \cdots, a_{i\,n})^t$ es la fila i (transpuesta) de la matriz A. Con esta definición de x, la fila i de B es igual a cero. La idea entonces es, eliminar la fila i y la columna i de B y aplicar el método de la Potencia a la matrix $(n-1)\times(n-1)$ resultante, para hallar λ_2.

   Implemente un algoritmo recursivo que utilice el método de la Potencia junto con la deflación de Wielandt para hallar todos los autovalores de una matriz dada.

3. Implemente el algoritmo para calcular autovalores basado en la descomposición QR, dado en la lámina 223 de las notas de clase. Incluya en el mismo, aparte del máximo número de iteraciones, una condición de parada donde la diferencia entre las diagonales de las matrices A_{k-1} y A_k sea menor que una tolerancia dada.

4. Para las matrices:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

(c) matriz del lab.5 con $n = 10$,

calcule todos los autovalores utilizando sus dos implementaciones previas. Utilice como iterado inicial, respectivamente, $(1, -1, 2)^t$, $(0, 0, 0, 1)^t$ y el vector de unos. Incluya en sus algoritmos el cálculo de tiempo cpu.

Presente sus resultados en una tabla.